27/04/2020

8° online μάθημα

Από το βιβλίο «Ασκήσεις Βασικής Άλγεβρας»
του Απόστολου Μπεληγιάννη
(το συγκεκριμένο βιβλίο μπορεί να βρεθεί στον κάλλιπο)

Σελίδες: 31 : Ορισμός του Διαγράμματος Hasse.
έπεται την άσκηση 3.7.5 στη σελίδα

Από το βιβλίο «Θεωρία Ομάδων» του Νίκου Μαρμαρίδη
Σελίδες: 91 - 95: τις ασκήσεις: Α48, Α49, Α50, Α51,
Α52, Α53, Α54, Α55, Α56, Α57, Α59, Α60, Α62

Σημειώσεις Καθηγητή:
Παραδείγματα Διαγραμμάτων Hasse

Παρατήρηση: Για τον ορισμό του Διαγράμματος Hasse των υποομάδων μιας πεπερασμένης ομάδας (βλέπε σελ. 127 στο βιβλίο "Ασκήσεις Βασικής Άλγεβρας" Μπεληγιάννη).

Παράδειγμα 1

$G=\langle a\rangle$, με $\#G=p$, p πρώτος.

Τότε $\#G$ έχει 2 θετικούς διαιρέτες: $\{1,p\}$

Διάγραμμα Hasse Υποομάδων της G:

$$\begin{tikzcd} H_p=G \arrow[d, dash] \\ H_1=\{e_G\} \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 2

$G=\langle a\rangle$, με $\#G=p^2$, p πρώτος

Τότε $\#G$ έχει 3 θετικούς διαιρέτες $\{1,p,p^2\}$

Διάγραμμα Hasse Υποομάδων της G:

$$\begin{tikzcd} H_{p^2}=G=\langle a\rangle \arrow[d, dash] \\ H_p=\langle a^p\rangle \arrow[d, dash] \\ H_1=\{e_G\} \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 3

$G=\langle a\rangle$, με $\#G=p^3$, p πρώτος

Τότε $\#G=p^3$ έχει 4 θετικούς διαιρέτες: $\{1,p,p^2,p^3\}$

Διάγραμμα Hasse Υποομάδων της G:

$$\begin{tikzcd} H_{p^3}=\langle a\rangle \arrow[d, dash] \\ H_{p^2}=\langle a^p\rangle \arrow[d, dash] \\ H_p=\langle a^{p^2}\rangle \arrow[d, dash] \\ H_1=\{e_G\} \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 4

$G=\langle a\rangle$, με $\#G=p\cdot q$, όπου p,q πρώτοι με $p\neq q$.

Τότε η $\#G$ έχει 4 θετικούς διαιρέτες: $\{1,p,q,p\cdot q\}$

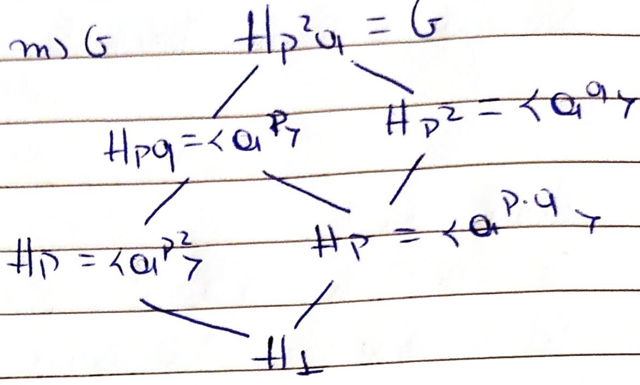
Διάγραμμα Hasse Υποομάδων της G:

$$\begin{tikzcd} & H_{pq}=G \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\ H_p=\langle a^q\rangle \arrow[dr, dash] & & H_p=\langle a^p\rangle \arrow[dl, dash] \\ & H_1=\{e_G\} & \end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 5

$G = \langle a \rangle$, με $\# G = p^2 \cdot q$, p, q πρώτοι με $p \neq q$.
Το $p^2 q$ έχει 6 θετικούς διαιρέτες: $\{1, p, q, p \cdot q, p^2, p^2 \cdot q\}$

Διάγραμμα Hasse Υποομάδων της G



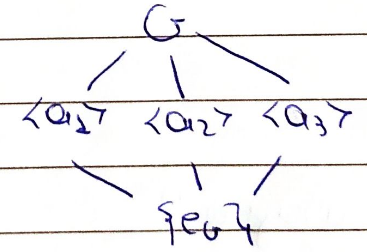
Παράδειγμα 6

$G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Η G έχει τρία στοιχεία της τάξης 2.

$a_1 = ([1]_2, [0]_2)$
$a_2 = ([0]_2, [1]_2)$
$a_3 = ([1]_2, [1]_2)$

Αφού $\# G = 4$ από Θ. Lagrange αν H υποομάδα της G έχουμε $\# H \in \{1, 2, 4\}$
Αν $\# H = 2$, τότε $H = \langle a_1 \rangle$ ή $H = \langle a_2 \rangle$ ή $H = \langle a_3 \rangle$

Διάγραμμα Hasse Υποομάδων της G



Παράδειγμα 7

$$G = S_3 = \left\{ id_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, z_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, z_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\left. z_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \rho = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Έχουμε $ord(z_1) = ord(z_2) = ord(z_3) = 2$

$ord(\rho) = ord(\sigma) = 3$

Επίσης $\langle z_1 \rangle = \{e_G, z_1\}$, $\langle z_2 \rangle = \{e_G, z_2\}$

$\langle z_3 \rangle = \{e_G, z_3\}$

$\langle \rho \rangle = \langle \sigma \rangle = \{e_G, \rho, \sigma\}$

Διάγραμμα Hasse

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & G = S_3 \arrow[dll, dash] \arrow[dl, dash] \arrow[d, dash] \arrow[dr, dash] & \\
\langle z_1 \rangle \arrow[drr, dash] & \langle z_2 \rangle \arrow[dr, dash] & \langle z_3 \rangle \arrow[d, dash] & \langle \rho \rangle = \langle \sigma \rangle \arrow[dl, dash] \\
 & & \{e_G\} &
\end{tikzcd}$$

Παράδειγμα 8

Για το διάγραμμα Hasse της $(\mathbb{Z}_{36}, +)$ σελ. 128 στο βιβλίο "Ασκήσεις Βασικής Άλγεβρας", Μπεληγιάννη, Κάλδιπος

Παράδειγμα 9

Έστω p πρώτος, r ακέραιος με $r \geq 1$ και $G = \langle a \rangle$ κυκλική τάξη p^r. Τότε η $\#G$ έχει $r+1$ θετικούς διαιρέτες: $\{1, p, p^2, p^3, \ldots, p^r\}$ και το διάγραμμα Hasse των υποομάδων της G είναι:

$$\begin{array}{c}
H_{p^r} = G = \langle a \rangle \\
| \\
H_{p^{r-1}} = \langle a^p \rangle \\
| \\
H_{p^{r-2}} = \langle a^{(p^2)} \rangle \\
\vdots \\
H_{p^2} = \langle a^{(p^{r-2})} \rangle \\
| \\
H_p = \langle a^{(p^{r-1})} \rangle \\
| \\
H_1 = \{e_G\}
\end{array}$$